

Kryteria informacyjne, testowanie autokorelacji, modele dynamiczne

Stanisław Cichocki

Natalia Neherbecka

Zajęcia 18-19

Plan zajęć

1. Kryteria informacyjne
2. Testowanie autokorelacji
3. Modele dynamiczne: modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
4. Analiza przyczynowości

Plan zajęć

1. Kryteria informacyjne
2. Testowanie autokorelacji
3. Modele dynamiczne: modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
4. Analiza przyczynowości

Kryteria informacyjne

- **Kryteria informacyjne:** Kryteria informacyjne pozwalają porównywać różne modele dla tej samej zmiennej zależnej. Najlepszym modelem jest model, dla którego wartość kryterium jest najniższa.
- Dobry model cechuje się tym, iż:
 - a) jest dobrze dopasowany;
 - b) jest prosty – posiada możliwie najmniej parametrów.

Kryteria informacyjne

- Kryterium Akaike:

$$AIC = \log \frac{(e'e)}{2} + \frac{2K}{N}$$

gdzie:

K – liczba parametrów w modelu

N - liczba obserwacji

$e'e$ – suma kwadratów reszt

Kryteria informacyjne

- Kryterium Bayesowskie kryterium Schwarza

$$BIC = \log \frac{(e'e)}{2} + \frac{K \log(N)}{N}$$

gdzie:

K – liczba parametrów w modelu

N- liczba obserwacji

$e'e$ – suma kwadratów reszt

Kryteria informacyjne

- Wartość kryteriów rośnie wraz ze wzrostem:

a) sumy kwadratów reszt (jakość dopasowania);

b) liczby parametrów.

Plan zajęć

1. Kryteria informacyjne
2. Testowanie autokorelacji
3. Modele dynamiczne: modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
4. Analiza przyczynowości

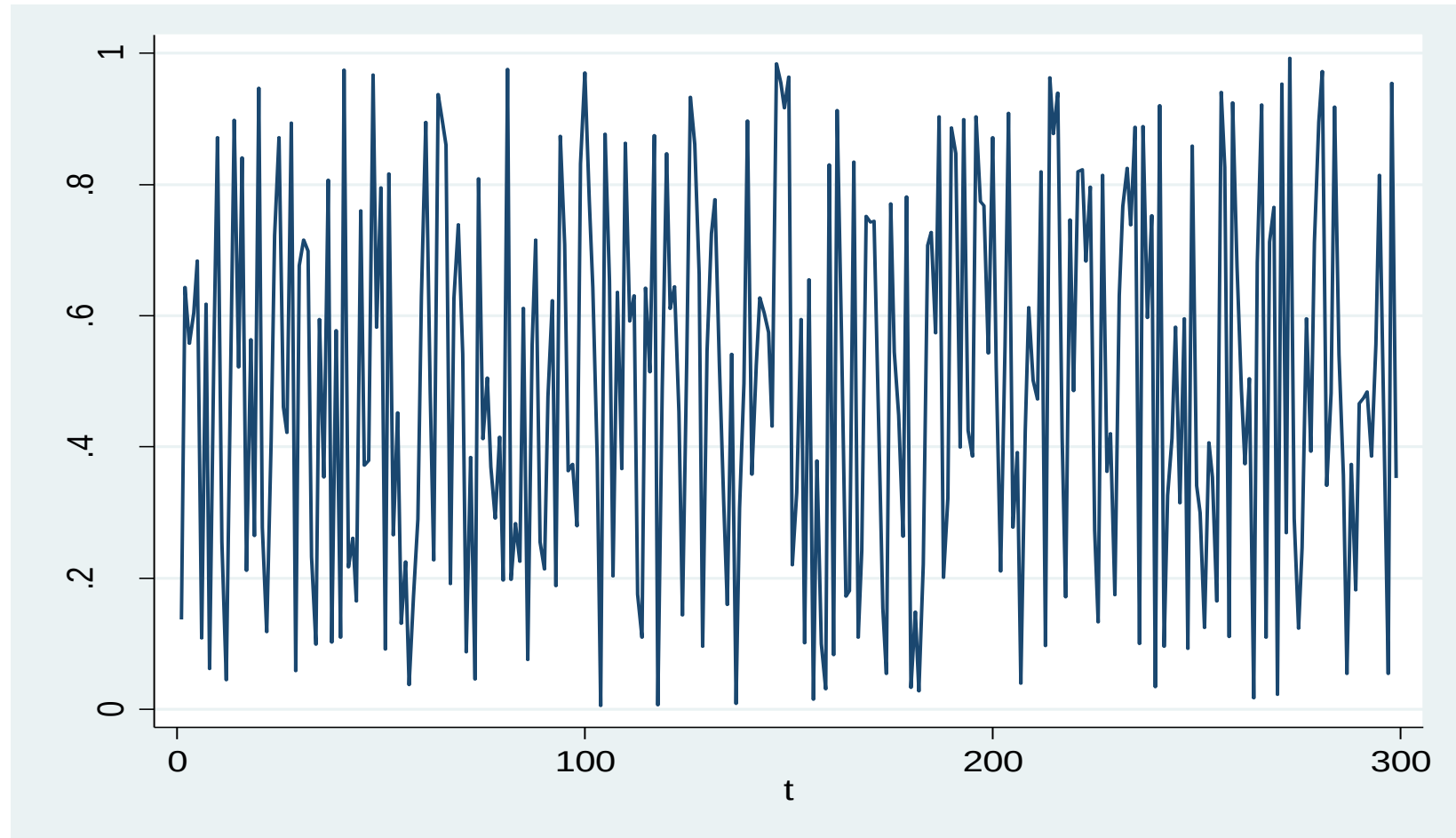
Testowanie autokorelacji

Przypomnienie: Co to znaczy, że w modelu występuje autokorelacja?

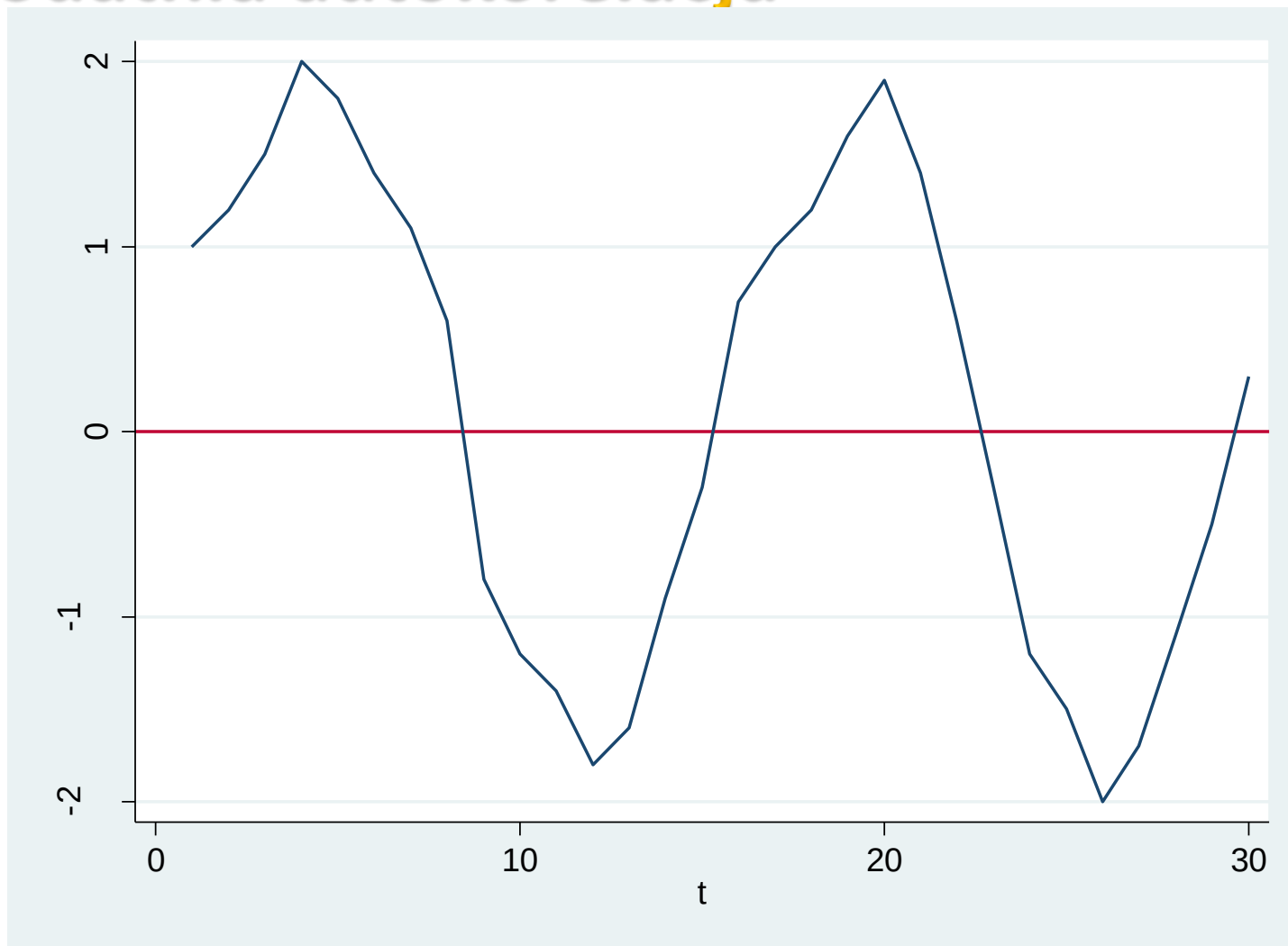
- Brak autokorelacji

$$Var(\varepsilon) = \begin{bmatrix} Var(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \cdots & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

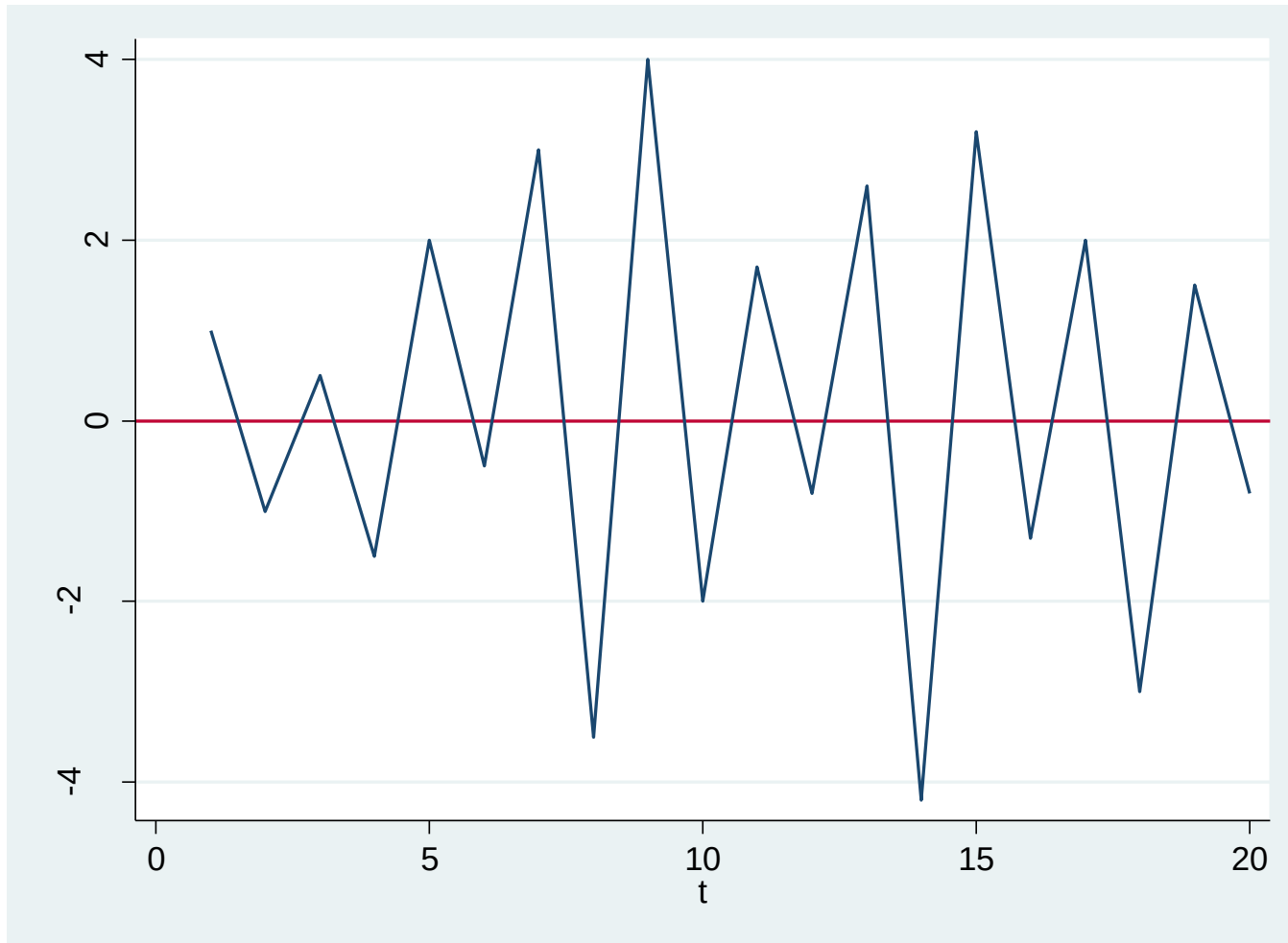
Brak autokorelacji



Dodatnia autokorelacja



Ujemna autokorelacija



Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):

$$H_0 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0 \quad - \text{brak autokorelacji}$$

$$H_1 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \neq 0 \quad - \text{autokorelacja}$$

gdzie $t = 1, \dots, T$

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):
- specjalne tablice z wartościami krytycznymi: d_l , d_u

1. Statystyka $DW < 2$

- a) $DW < d_l$ - odrzucamy hipotezę zerową o braku autokorelacji i przyjmujemy hipotezę o dodatniej autokorelacji
- b) $d_l < DW < d_u$ - brak konkluzji
- c) $DW > d_u$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):

2. Statystyka DW > 2

- a) $DW > 4 - d_l$ - odrzucamy hipotezę zerową o braku autokorelacji i przyjmujemy hipotezę o ujemnej autokorelacji
- b) $4 - d_u < DW < 4 - d_l$ - brak konkluzji
- c) $DW < 4 - d_u$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):
- Do badania autokorelacji I rzędu (między ε_t , ε_{t-1})
- Rozkład statystyki testowej wyprowadzony dla małych prób
- Nie można go stosować w modelach gdzie jedną ze zmiennych objaśniających jest opóźniona zmienna zależna

Przykład

gretl: model 2

Plik Edycja Testy Zapisz Wykresy Analiza LaTeX

Model 2: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 60 obserwacji 1976:1-1990:4
Zmienna zależna: nocars

	współczynnik	błąd standardowy	t-Student	wartość p	
const	8552,44	3494,61	2,447	0,0177	**
pop	-60,4498	23,4674	-2,576	0,0128	**
Y	757,040	136,762	5,535	9,82E-07	***
price	-5,50342	9,43847	-0,5831	0,5623	
dq2	247,554	74,3300	3,330	0,0016	***
dq3	26,1601	74,9925	0,3488	0,7286	
dq4	-39,8940	74,4281	-0,5360	0,5942	

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1894,16
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 311,346
Suma kwadratów reszt = 2,1825e+006
Błąd standardowy reszt = 202,927
Wsp. determinacji R-kwadrat = 0,61839
Skorygowany wsp. R-kwadrat = 0,57519
Statystyka F (6, 53) = 14,3144 (wartość p < 0,00001)
Statystyka testu Durбина-Watsona = 1,16128
Autokorelacja reszt rzędu pierwszego = 0,418676

Testowanie autokorelacji

- Test Breuscha-Godfrey (Test BG):
- Do badania autokorelacji wyższego rzędu
- Można go stosować w modelach gdzie występują opóźnione zmienne zależne

Testowanie autokorelacji

- Test Breuscha-Godfrey (Test BG):

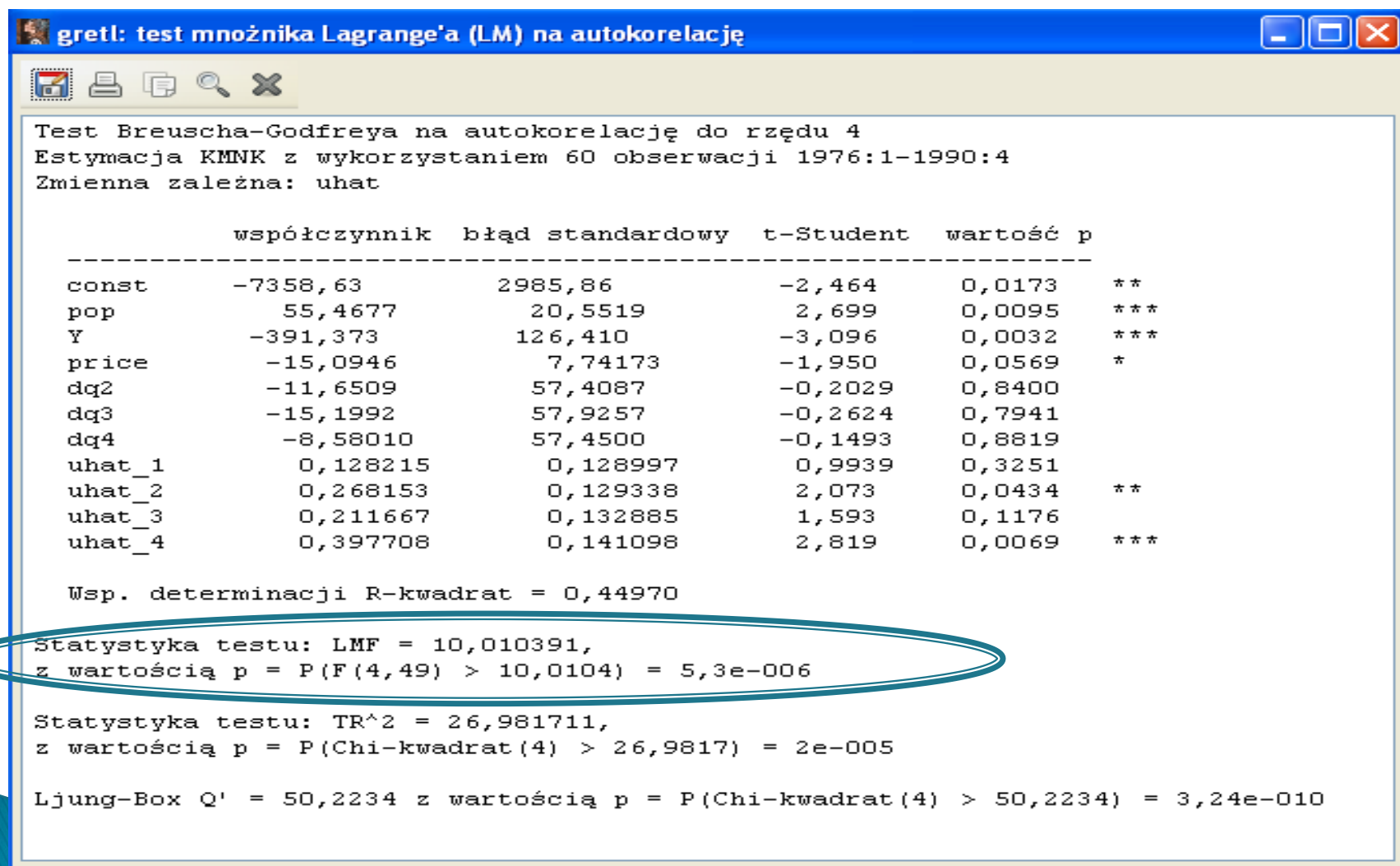
$$H_0 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-i}) = 0 \quad \text{gdzie } i = 1, \dots, s$$

$$H_1 : \varepsilon_t = \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_s \varepsilon_{t-s} + u_t \quad \text{gdzie } Var(u) = \sigma_u^2 I$$

- Hipoteza zerowa: brak autokorelacji

- Hipoteza alternatywna: autokorelacja

Przykład



Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Brak autokorelacji błędu losowego – kowariancja dwóch różnych błędów losowych jest zerowa:

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \text{dla } i \neq j$$

Plan zajęć

1. Kryteria informacyjne
2. Testowanie autokorelacji
3. Modele dynamiczne: modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
4. Analiza przyczynowości

Modele dynamiczne

- **Model dynamiczny**: opisuje kształtowanie zjawiska w czasie, szacowany na szeregach czasowych.
- Zastosowanie modeli dynamicznych:
 - a) badanie procesu dostosowań do stanu równowagi;
 - b) formułowanie prognoz;
 - c) objaśnianie dynamiki zmiennej zależnej.

Szereg czasowy

<http://www.bankier.pl/inwestowanie/profile/quote.html?symbol=ROPA>

Modele dynamiczne

- Model dynamiczny o rozłożonych opóźnieniach (DL): wpływ zmiennych niezależnych na zmienna zależną jest rozłożony w czasie.

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

Jeśli x_t jest nielosowe i składnik losowy nie podlega autokorelacji, to model spełnia założenia KMRL.

Modele dynamiczne

- Interpretacja parametrów:

β_p - zmiana y_t jaka nastąpi, jeśli zmieni się X sprzed p okresów a dla pozostałych okresów X pozostanie niezmienione

- taka interpretacja jest niepraktyczna dlatego stosuje się różne **mnożniki**

Modele dynamiczne

- Mnożniki w modelu DL:

a) mnożnik bezpośredni: wielkość oczekiwanej reakcji y na zmiany x w bieżącym okresie: β_0

b) mnożnik skumulowany: wielkość oczekiwanej reakcji y na zmiany x w kolejnych τ okresach: $\sum_{s=0}^{\tau} \beta_s$

c) mnożnik długookresowy: wielkość oczekiwanej reakcji y na zmiany x we wszystkich przeszłych okresach: $\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s$

Przykład

- Przykładem modelu DL jest funkcja konsumpcji, w której wydatki konsumpcyjne zależą nie tylko od bieżących dochodów, ale również od minionych.
- Rozważmy hipotetyczny przykład, w którym wydatki konsumpcyjne gospodarstw domowych w t -tym roku, które oznaczymy przez y_t zależą od dochodów do dyspozycji w tym samym roku x_t , od dochodów opóźnionych o jeden rok x_{t-1} i o dwa lata x_{t-2} .

$$y_t = \text{stała} + 0,4 x_t + 0,3 x_{t-1} + 0,2 x_{t-2}$$

Przykład

$$y_t = \text{stała} + 0,4 x_t + 0,3 x_{t-1} + 0,2 x_{t-2}$$

- badana osoba uzyskała stałą podwyżkę dochodów, wynoszącą 1000 złotych i dochody po podwyżce nie zmieniają się w ciągu dłuższego okresu czasu.
- W pierwszym roku konsumpcja tej osoby przyrośnie o 0,4 razy 1000 złotych, a więc o 400 złotych, w drugim roku o dalsze 300 złotych, a w trzecim – o dalsze 200 złotych.
- W przykładzie tym mnożnik krótkookresowy wynosi 0,4, a długookresowy $(0,4 + 0,3 + 0,2) = 0,9$; pozostałe 0,1 dochodu jest oszczędzane.

Plan zajęć

1. Kryteria informacyjne
2. Testowanie autokorelacji
3. Modele dynamiczne: modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
4. Analiza przyczynowości

Modele dynamiczne

- Wprowadzenie opóźnionych wartości zmiennej zależnej pozwala na:
 - a) znaczną poprawę własności modelu małym kosztem;
 - b) uchwycenie inercji zjawisk ekonomicznych.

Modele dynamiczne

- Model autoregresyjny o rozłożonych opóźnieniach:

$$y_t = \underbrace{\alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p}}_{\text{AR}} + \underbrace{\mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_s x_{t-s}}_{\text{DL}} + \varepsilon_t$$

Modele dynamiczne

- **Stan równowagi długookresowej**: jest to stan, w którym wartość oczekiwana zmiennej zależnej pozostaje stała w czasie, o ile tylko nie zmieniają się zmienne niezależne.

- w modelach ADL: $y^* = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p})$,

$$x^* = x_t = x_{t-1} = \dots = x_{t-s}$$

- wstawiając y^*, x^* do modelu ADL otrzymujemy:

$$(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p) y^* = \mu + (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s) x^*$$

Modele dynamiczne

- oznaczając: $\mu^* = \frac{\mu}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$ oraz $\beta^* = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$

otrzymujemy: $y^* = \mu^* + x^* \beta^*$

Modele dynamiczne

- Mnożniki w modelu ADL:

- a) mnożnik bezpośredni: mierzy wpływ zmiany x_t o Δx na oczekiwany poziom y_t , identyczny jak w modelu DL: β_0
- b) mnożnik długookresowy: opisuje wpływ trwałej zmiany x na wartość y w nowym położeniu równowagi:

$$\beta = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

UWAGA !

- W przypadku losowych zmiennych niezależnych dowiedzenie **zgodności estymatora uzyskanego MNK** jest możliwe tylko wtedy, gdy zmienne niezależne nie są skorelowane z zaburzeniem losowym.
- Warunek ten będzie spełniony jeśli w modelu *ADL* nie będzie występowała autokorelacja czynnika losowego (sprawdzana testem Breuscha-Godfrey).

Przykład

- Celem poniższego przykładu jest oszacowanie długookresowej relacji pomiędzy konsumpcją a PKB dla Stanów Zjednoczonych. Dysponujemy danymi rocznymi za okres 1960-2000
- Zarówno konsumpcja, jak i PKB są wyrażone w bilionach dolarów 1990 roku. Zaczynamy od oszacowania modelu o rozłożonych opóźnieniach (przyjmijmy, że maksymalne opóźnienie wynosi 2).
- Opis zmiennych:
 - $I_{\text{konsumpcja}}$ – logarytm konsumpcji
 - I_{PKB} – logarytm PKB
 - I_{PKB_1} – pierwsze opóźnienie dla logarytmu PKB
 - I_{PKB_2} – drugie opóźnienie dla logarytmu PKB

Przykład

Model 11: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 39 obserwacji 1962-2000

Zmienna zależna: l_konsumpcja

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-1,55848	0,105969	-14,707	<0,00001 ***
l_PKB	1,31383	0,198966	6,603	<0,00001 ***
l_PKB_1	-0,224497	0,308051	-0,729	0,47099
l_PKB_2	0,0449443	0,193982	0,232	0,81813

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = 7,94337

Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,342894

Suma kwadratów reszt = 0,0170666

Błąd standardowy reszt = 0,0220821

Wsp. determinacji R-kwadrat = 0,99618

Skorygowany wsp. R-kwadrat = 0,995853

Statystyka F (3, 35) = 3042,57 (wartość p < 0,00001)

Statystyka testu Durбина-Watsona = 0,456097

Autokorelacja reszt rzędu pierwszego = 0,741028

Logarytm wiarygodności = 95,4781

Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -182,956

Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = -176,302

Kryterium infor.Hannana-Quinna (HQC) = -180,569

Przykład

- W modelu tym **mnożnik krótkookresowy** wynosi 1,31 i oznacza, że wzrost PKB o 1% powoduje w tym samym roku (natychmiastowo) wzrost konsumpcji 1,31%.
- **Mnożnik długookresowy** wynosi 1,13. $(1,31383 - 0,224497 + 0,0449443 = 1,1342773)$.
- Wielkość tę należałoby interpretować następująco: wzrost PKB o 1% w danym roku spowoduje łączny (w długim okresie) wzrost konsumpcji o 1,13%.

Przykład

- Statystyka Durbina-Watsona wynosi 0,456 , co wskazuje na autokorelację reszt.
- Aby pozbyć się autokorelacji reszt w modelu należy uwzględnić opóźnione wartości zmiennej zależnej czyli oszacować model autoregresyjny o opóźnieniach rozłożonych ADL.

Przykład

Model 14: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 39 obserwacji 1962-2000
Zmienna zależna: l_konsumpcja

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,0449487	0,122751	-0,366	0,71657
l_PKB	0,720132	0,100004	7,201	<0,00001 ***
l_PKB_1	-0,652734	0,154103	-4,236	0,00017 ***
l_PKB_2	-0,0739658	0,152282	-0,486	0,63038
l_konsumpcj_1	0,890196	0,198708	4,480	0,00008 ***
l_konsumpcj_2	0,124080	0,200120	0,620	0,53950

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = 7,94337
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,342894
Suma kwadratów reszt = 0,00272136
Błąd standardowy reszt = 0,00908104
Wsp. determinacji R-kwadrat = 0,999391
Skorygowany wsp. R-kwadrat = 0,999299
Statystyka F (5, 33) = 10829,2 (wartość p < 0,00001)
Statystyka testu Durбина-Watsona = 2,00961
Autokorelacja reszt rzędu pierwszego = -0,0155212
Logarytm wiarygodności = 131,28
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -250,56
Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = -240,579
Kryterium infor.Hannana-Quinna (HQC) = -246,979

Test
Breuscha-
Godfrey'a

Alternatywna statystyka: $TR^2 = 1,297323$,
z wartością p = $P(\text{Chi-kwadrat}(4) > 1,29732) = 0,862$

Przykład

- Dołączenie do zbioru zmiennych objaśniających pierwszego i drugiego opóźnienia logarytmu konsumpcji doprowadziło do uzyskania wyniku, który jest sensownie interpretowalnym modelem. Zastrzeżenia mogą budzić jedynie wysokie wartości p-value w teście na istotność drugich opóźnień logarytmu konsumpcji i logarytmu PKB, wskazując na ich statystyczną nieistotność.
- **Co jednak jest szczególnie ważne, to wynik testu Breuscha-Godfrey'a, dla którego $p\text{-value}=0,862$, co oznacza brak autokorelacji reszt.** Wiemy, że jest to ważny sygnał o **zgodności** estymatorów.
- Możemy oczekiwać, że usunięcie z modelu dwóch zmiennych nieistotnych nie wpłynie znacząco na zmianę wyniku.

Przykład

Model 16: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 40 obserwacji 1961-2000

Zmienna zależna: l_konsumpcja

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,0678800	0,0980073	-0,693	0,49300
l_PKB	0,706629	0,0830334	8,510	<0,00001 ***
l_PKB_1	-0,691184	0,0838748	-8,241	<0,00001 ***
l_konsumpcj_1	0,993768	0,0642442	15,469	<0,00001 ***

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = 7,92696

Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,354029

Suma kwadratów reszt = 0,0027602

Błąd standardowy reszt = 0,00875627

Wsp. determinacji R-kwadrat = 0,999435

Skorygowany wsp. R-kwadrat = 0,999388

Statystyka F (3, 36) = 21239,1 (wartość p < 0,00001)

Statystyka testu Durbina-Watsona = 2,17156

Autokorelacja reszt rzędu pierwszego = -0,0889292

Statystyka testu Durbina h = -0,606299

(h stat dla zmiennej 8, z T' = 39)

Logarytm wiarygodności = 134,869

Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -261,738

Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = -254,983

Kryterium infor.Hannana-Quinna (HQC) = -259,296

Plan zajęć

1. Kryteria informacyjne
2. Testowanie autokorelacji
3. Modele dynamiczne: modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
4. Analiza przyczynowości

Analiza przyczynowości

- **Przyczynowość w sensie Grangera:** zmienna x jest przyczyną zmiennej y , jeśli bieżące wartości y można dokładniej prognozować przy użyciu przeszłych wartości x niż bez ich wykorzystania.

Analiza przyczynowości

- Testowanie przyczynowości w sensie Grangera:

$$y_t = a(t) + \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

gdzie:

$a(t)$ – część deterministyczna modelu

- testujemy $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ x nie jest przyczyną w sensie Grangera y

Pytania teoretyczne

1. Podać ogólną postać modeli DL i ADL.
2. Podać wzory na mnożnik bezpośredni i długookresowy w modelach DL i ADL i podać ich interpretację.
3. Wyprowadzić wzór na równowagę długookresową w modelu ADL.
4. Podać definicje przyczynowości w sensie Grangera i wyjaśnić sposób jej testowania.

Dziękuję za uwagę